数理解析研究所講究録
102巻 1970年 71-103

場の理論のモデル

学習院大・理　　江沢　洋

§1　まえおき

場の理論は無矛盾な体系になり得るかとの疑問がだされてから久しい。　　たとえば，量子電磁力学は水素原子のスペクトルのラム・シフトや電子の異常磁気能率などについて計算された限りの精度で——有効数字にして数桁にわたり——実験値と美事に一致する答をあたえはするが，これは出発点のハミルトニアンに無限大の引き算項を付加して繰り込みの処理を行なった上のことであって，このハミルトニアンは，そのままでは作用素として意味をなさない．当然のことながら繰り込みにまつわるパラドックスも数多く知られている[1]．

しかし，最近になって　いわゆる constructive field theory にめざましい進展がなされ，ある種の物理屋，数学屋は大いに元気づけられている．物理の面からする要求の基本的なも

のを"ほとんどすべて"満す場の理論のモデルが——まだ実験と定量的につき合わせられるほどの現実性はもたないにせよ——十分な数学的コントロールの下で構成されるにいたったのである.

私は, このような最近の進展の中から二・三の論点を拾って御紹介したいと思う. 全体を眺め渡すことにもならなければ, これらの仕事の特徴である数学的な注意ぶかさを再現することにもならないであろう. 眺望のためには文献[2]を, 議論の詳細についてはそのつど掲げる原著を参照されたい。~~触れ得ずに残る論点に関しては文献表をおしまいにつける.~~
なお, 場の理論の数学的な枠組の解析の総報として文献[3]があることをつけ加えておこう.

場の理論がもつべき基本的(そして定性的な)性格の規定として次の二種が標準的である:

<u>Wightman の要請</u> [3S, pp. 96~102]

I. <u>量子力学</u>であること. 場の"状態"は(可分な) Hilbert空間$\mathfrak{H}$のベクトル(正確には *unit ray*!)で表わされ, 場の物理量は$\mathfrak{H}$のなかでの自己共役作用素で表わされる.…

特に場$\varphi(x)$ —— $x=(\vec{x},t)$は時空座標, 以下"中性スカラー場"だけに話を限る —— は時空の個々の点ではオブザーバ

ブルとしての意味をもたないが(場の量の不確定性関係[4]) operator-valued の超関数である：$\varphi(f,t)=\int\varphi(x,t)f(x)dx$ が $\mathcal{H}$ に稠密な定義域 $\mathbb{D}$ をもち(†) $\varphi(f,t)^*=\varphi(f,t)$，かつ $\varphi(f,t)\mathbb{D}\subset\mathbb{D}$．ただし $f=f^*$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ の関数とする．しかし，時間方向にも拡，たとえとって $\check{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu+1})$ により $\varphi(\check{f})=\int\varphi(x,t)\check{f}(x,t)$ としてはじめて作用素になるというのが一般である【参照[4′]】．

II．<u>相対論的共変性</u>．時空の並進を a，Lorentz 回転を Λ とするとき Poincaré 群の $\mathcal{H}$ 上の連続ユニタリ表現 $U(a,\Lambda)$ があって，

$$U(a,\Lambda)\varphi(\check{f})U(a,\Lambda)^*=\varphi(f_{\{a,\Lambda\}}),\quad \check{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu+1})$$

ただし，$\check{f}_{\{a,\Lambda\}}(x)=\check{f}(\Lambda^{-1}[x-a])$．さらに $U(a,\Lambda)\mathbb{D}\subset\mathbb{D}$．

特に $U(a,\Lambda)\Omega=\Omega$ なる“真の(あるいは物理的)真空” $\Omega\in\mathbb{D}$ が存在する，そして unit ray，$\|\Omega\|=1$，として唯一．

$U(a,1)$ の $a=(\vec{\alpha},0)$ に対する生成作用素は場の運動量 P，$a=(0,\tau)$ に対するものは場のエネルギー(ハミルトニアン) H であるが，これらは $H\geqq0$，$H^2-P^2\geqq0$ を満す(スペクトル条件)．

III．(微視的)<u>因果性</u>　$[\varphi(x),\varphi(x')]=0$ if $(t-t')^2-(\vec{x}-\vec{x}')^2<0$．

IV．<u>散乱現象</u>をもつこと．そして“漸近的完備性 $\mathcal{H}=\mathcal{H}^{in}=\mathcal{H}^{out}$”といわれるものも．詳しい説明は省く[3B, 3J, 4″] ▌

なお“<u>真空 Ω の巡回性</u>”の要請について[3S]を見よ．また[5]．

(†)　* は作用素については adjoint を，複素数については共役複素数を示すものとする．

Haag-Kastler の要請 [6, 7, 3B]

Minkowski 時空の有界開領域 $\check{B}$ ごとに von Neumann (以下 v. N. と略記) 代数 $\mathfrak{A}(\check{B})$ があり，次の性質をもつ：

I. Isotony. $\check{B}_1 \supset \check{B}_2 \Longrightarrow \mathfrak{A}(\check{B}_1) \supset \mathfrak{A}(\check{B}_2)$.

II. 局所性 $\check{B}_1 \sim \check{B}_2 \Longrightarrow \mathfrak{A}(\check{B}_1)$ と $\mathfrak{A}(\check{B}_2)$ は可換．ただし $\check{B}_1 \sim \check{B}_2$ とは $(t_1-t_2)^2-(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2<0$ がすべての $(\vec{x}_i, t_i) \in \check{B}_i$ になりたつこと．

III. $\bigcup_{\check{B}} \mathfrak{A}(\check{B})$ の norm-closure なる C*代数 $\check{\mathfrak{A}}$ は場の物理の記述に十分なオブザーバブルを含む(†).

IV. 相対論的共変性 $\check{\mathfrak{A}}$ の *-自己同型としての Poincaré 群の表現 $(a,\Lambda) \longrightarrow \sigma_{(a,\Lambda)}$ があり，$\sigma_{(a,\Lambda)}\mathfrak{A}(\check{B}) = \mathfrak{A}((a,\Lambda)\check{B})$．ただし $(a,\Lambda)\check{B}$ は変換 (a,Λ) による $\check{B}$ の像を表わす．

V. $\check{\mathfrak{A}}$ はある Hilbert 空間の有界作用素の代数による忠実かつ既約な表現をもつ ▌

ここでは表現の"物理的同値"の概念およびこの枠組に付與すべき"物理的解釈"の問題には立ち入るまい．前者は $\mathfrak{A}$ の忠実な表現はすべて物理的に同値なりとの著るしい結果に導き，オブザーバブルの代数的構造を強調するこの要請系がたてられた動機をあたえる重要な概念である [7]．後者については原著 [6] のほか [8, 9] などを参照．

(†) $\mathfrak{A}(\check{B})$ の自己共役な要素は局所観測量とよばれ時空領域 $\check{B}$ 内で行なわれる観測に対応する．$\mathfrak{A}$ のそれは準局所的という．

§2 $(\varphi^4)_2$-モデル

現在までに数学的コントロールの及んだモデルはいくつかあるけれども~~(§ を参照)~~, 最もよく調べられているのは空間を $\nu=1$ 次元に限った中性スカラー場 $\varphi(x,t)$ で,(†)

$$H = \overbrace{\frac{1}{2}\int [\pi^2 + (\partial\varphi/\partial x)^2 + \mu^2\varphi^2]\,dx}^{H_0} + \overbrace{\lambda\int \varphi^4\,dx}^{H_I}, \quad (\lambda>0) \tag{2.1}$$

をハミルトニアンにもつものである. ここに $\pi(x,t)$ は φ に正準共役な変数で, いわゆる正準交換関係(CCR)をみたす:

$$\left.\begin{aligned} &[\varphi(x,t),\ \pi(x',t)] = i\delta(x-x'), \\ &[\varphi(x,t),\ \varphi(x',t)] = [\pi(x,t),\ \pi(x',t)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

これは質点系の量子力学において質点 $k=1,2,\cdots,N$ の座標 q_k, 運動量 p_k のあいだに $[q_k, p_\ell] = i\delta_{k\ell}$, etc. を課することに相当するもので, 場の理論は空間 $\mathbb{R}^\nu$ の点 x が一つの質点にあたるとして質点系の量子力学を拡張する試みと思えばよかろう. 相対性理論との関連および素粒子の生成・消滅という事実との関連において その拡張の必然を考えることは興味ふかい問題であるが, ここでは立ち入らない [10].

量子力学の運動方程式,

$$dA/dt = i[H, A] \tag{2.3}$$

により

$$(\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 + \mu^2)\varphi(x,t) = -4\lambda\varphi^3(x,t). \tag{2.4}$$

(†) 範囲を明示しない積分は $-\infty$ から $+\infty$ にわたるものとする.

以上に記した諸式は形式的なものである。(2.2)の第一式から見ると一点の場というものは作用素として意味をなさない——operator-valued の超関数とみなすべきものであるから、(2.1)などに現われる"一点の場の積"には改めて意味づけが必要なのである。また(2.1)に見るような$\mathbb{R}^{\nu}$全体にわたる積分にも解釈をあたえなければならない。これらはφやHを自己共役な作用素とするような$\mathbb{D}$omainの構成の問題といいかえられるが、同時に上の諸式にも多少の書きかえが必要になる。書きかえを試みようとすると前節に掲げた諸要請が厳しい枠になっていることが気付かれるであろう。

一点の場の積の問題は在来の素粒子論の計算では摂動論の中間状態の和として必要になる積分$\int^{\infty}\cdots dk$ (kは運動量)の発散——紫外発散——として現象し、これが繰り込みにより処理されてきたものである。繰り込みは無限大から無限大を引く無茶な計算法だと非難するむきもあったが、最近のその合理化も見かけは似ている。ひとまず積分の上限をk_{max}に抑え(切断という)潜在的の無限大を相殺させた後で$k_{max}\to\infty$とする。この極限がC^*代数とその上の"状態ω"という舞台装置の上で行なわれるのが進歩の最も本質的な点かと思われる。こうした装置が必要になるのは極限の作用素を容れるHilbert空間が$k_{max}<\infty$のときの空間と"ユニタリ変換でつ

ながらない"別物になるためであって，状態ωの極限を計算して それからHilbert空間と代数の作用素表現とを"再構成する"という手順をふむことになる（GNS構成法，後出）．

再構成の問題は，生成・消滅を許した結果としての"粒子数の発散"にも関連し——物理の言葉で以上ふたつの発散を要約すれば"粒子が着物をきる効果"である——，また上に触れた空間$\mathbb{R}^\nu$の体積の無限大からも起る．

実は$(\varphi^4)_2$-モデルは特異性が弱くて，この問題が体積の無限大からしか起らない（次節のWick積の項を参照）．

なお，このモデルで"相互作用"$\lambda\varphi^4$を摂動として（Green関数といわれる量を）計算すると摂動級数が発散する[11]．これは高次の項にゆくにつれ中間状態の数が——関与する粒子数の増大のため——急激に増加する結果として理解されるが，同種の発散が$-d^2/dq^2+\alpha q^2+\lambda q^4$をハミルトニアンとする一体問題ですでに起ることも心に留めておかねばならない[12]．

§3 Fock の表現

場の変数のCCR——(2.2)の作用素表現(†)には——質点系の場合von Neumannの定理がユニタリ同値を保証していたのに対

(†) より正確には $\mathcal{U}(f)=\exp[i\varphi(f,t)]$，$\mathcal{V}(g)=\exp[i\pi(g,t)]$；$f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対する $\mathcal{U}(f)\mathcal{V}(g)=\exp[i\int f(x)g(x)dx]\,\mathcal{V}(g)\,\mathcal{U}(f)$，$\mathcal{U}(f)\mathcal{U}(g)=\mathcal{U}(g)\mathcal{U}(f)$，…，の表現．

して [13],——ユニタリ非同値なものが無数にあり [14], しかも, 表現を一つ選ぶと（かなり一般な条件のもとで）それによって記述しうるハミルトニアンが定まってしまう [15].

いろいろの表現のうち最もよく性が知れているのはФокの表現である（詳細は [16] を参照）. その表現空間$\mathfrak{F}$は,

$$\mathfrak{F}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{F}_n\,,\qquad \mathfrak{F}_n=\{\psi_n(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_n)\,;\ \psi_n\in \mathrm{Sym}\,\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^{n\nu})\}\tag{3.1}$$

ただし Sym は対称関数の部分空間をとること, ψ_0は複素数. この空間のノルムは $\Psi=(\psi_0,\ \psi_1(\mathbf{k}),\ \psi_2(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2),\ \cdots)$ について

$$\|\Psi\|=\sum_{n=0}^{\infty}\|\psi_n\|_2^2\,,\qquad \|\psi_n\|^2=\int|\psi_n(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_n)|^2\,d\mathbf{k}_1\cdots d\mathbf{k}_n\,.\tag{3.2}$$

特に $|\psi_0|=1$, $\psi_{n(\geq 1)}=0$ なるベクトルをФокの真空, あるいは no-particle state という. $\psi_{n(\geq 1)}$は粒子（ある理由から裸の粒子という）がn個あるという確率振幅であり, 変数$\mathbf{k}$は粒子の運動量と解釈される(†)（座標と解釈しても形式は同じ）.

いま消滅作用素$a(p)$を次式で定義する：上のΨに対して,

$$(a(p)\Psi)_n=\sqrt{n+1}\;\psi_{n+1}(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_n,\mathbf{p})\,.\tag{3.3}$$

変数$\mathbf{k}_j$の数が減ったこと, すなわち粒子の消滅である. この作用素の定義域として仮に——$\mathfrak{F}$において稠密な,

$$\mathbb{D}_0=\{\Psi:\ \psi_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\nu}),\ n\leq n_{\Psi}<\infty;\ \psi_m=0,\ m>n_{\Psi}\}\tag{3.4}$$

消滅作用素の adjoint を求めるためフォームの計算をすると,

(†) これは$\mathbb{R}^{\nu}$のベクトルだから$\rightarrow$をつけるべきだが, 省略.

$$(a(q)^*\Psi)_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} \psi_{n-1}(k_1,\cdots,k_{j-1},k_{j+1},\cdots,k_n)\,\delta(k_j-q) \qquad (3.5)$$

に到達する．変数 k_j が一つ増していることは粒子の生成を意味するが，$a(q)^*$ を作用素とするには"均らし"

$$\int a(q)^* f(q)\,dq \equiv a^*(f),\ \left(\text{e.g. } f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\right) \qquad (3.6)$$

を施すほかない．$a^*(f): \mathbb{D}_0 \longrightarrow \mathbb{D}_0$ になる．これを生成作用素という．

簡単な計算により，$\mathbb{D}_0$ の上で，

$$\left.\begin{aligned} [\,a(p),\ a^*(f)\,] &= f(p), \\ [\,a(p),\ a(q)\,] = [\,a^*(f),\ a^*(g)\,] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

のなりたつことがわかる．第一式は形式的には $[a(p),a^*(q)]=\delta(p-q)$.

なお，$a(p)$ に対しても (3.6) と同様の均らしを行なうと，実数値の $f,\ g\in\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，

$$P(f)=[a(f)-a^*(f)]/(\sqrt{2}\,i),\quad Q(g)=[a(g)+a^*(g)]/\sqrt{2} \qquad (3.8)$$

が自己共役な拡大をもつ．$\{a(f),\ a^*(f),\ f\in\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^\nu)\}$ と交換する $\mathfrak{F}$ 上の有界作用素は恒等作用素の定数倍に限る，等々，[16].

形式的に，

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^\nu}}\int dk\,\frac{1}{\sqrt{2\mu(k)}}\left[\,a(k)e^{-i[kx-\mu(k)t]} + a^*(k)e^{i[kx-\mu(k)t]}\,\right] \\ \pi(x,t) &= \frac{1}{i\sqrt{(2\pi)^\nu}}\int dk\,\sqrt{\frac{\mu(k)}{2}}\left[\,a(k)e^{-i[kx-\mu(k)t]} - a^*(k)e^{i[kx-\mu(k)t]}\,\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

と書くと，1° この対は CCR，(2.2) をみたす（かつ $\partial\varphi(x,t)/\partial t=\pi(x,t)$.）．2° これはまた $\lambda=0$ とおいた (2.4) もみたす —— ただし $\mu(k)=\sqrt{k^2+\mu^2}$ として —— ので自由場とよばれる．以下では 1° のみに注目し $t=0$ にとる．

そして $\varphi(f,0)$ を $\varphi(f)$ と略記することがある．

(3.9) を自由場のハミルトニアン H_0 —— (2.1) を見よ —— に代入すると，

$$H_0=\int \mu(k)\cdot\frac{1}{2}[a^*(k)a(k)+a(k)a^*(k)]\,dk\,. \tag{3.10}$$

これは，しかし，$\mathfrak{F}_{OK}$ 空間に定義域をもたない．たとえば $\mathfrak{F}_{OK}$ の真空 Ω^F にかけてみると，$a(k)a^*(k)$ の項から

$$H_0\,\Omega^F=\frac{1}{2}\,\delta(0)\cdot\left[\int\mu(k)\,dk\right]\Omega^F=\infty\times\Omega^F.$$

この種の現象を避けるため次の処法を定める：

<u>Wick 積</u>　生成・消滅作用素の入り混った積は消滅作用素がすべて生成作用素の右にあるものと解釈せよ．この処法を $:\;:$ で示し，これに従う積を Wick 積とよぶ．

たとえば，$:a(k)\,a^*(k):\;=\;a^*(k)\,a(k)$,

$$:\varphi(x)^n:\;=\int d\underline{k}\;w(\underline{k})\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^*(-k_1)\cdots a^*(-k_j)\,a(k_{j+1})\cdots a(k_n) \tag{3.11}$$

ただし，

$$w(\underline{k})=\prod_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\nu}\cdot 2\mu(k_\ell)}}\,e^{ik_\ell\cdot x}\,,\qquad \int d\underline{k}=\int dk_1\cdots dk_n\,.$$

以前に述べた "一点の場の積" の問題がこれで全部解決されるわけではない．自由場についても $:\varphi(x,t)^n:$ を空間 $\mathbb{R}^\nu$ に関してだけ均らしたのでは $\nu\geqq 3$, $n\geqq 2$ のとき $\mathfrak{F}_{OK}$ 空間の作用素にはならない；時間に関する均らしも要る [17]．しかし，空間が $\nu=1$ 次元の場合には，

<u>定理 3.1</u>　$\varphi(x,t)$ を $\nu+1=2$ 次元の時空における $\mu>0$ の自由スカラー場とすれば $A=\int :\varphi(x,t)^n: f(x)dx$，$f\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$，$n\in \mathbb{Z}_+$ は $\mathfrak{F}$ の中に稠密な *invariant domain* $\mathbb{D}_1 \supset \mathbb{D}_0$ をもつ作用素であり [18]，本質的に自己共役 (e.s.a.) である [19]。$\mathbb{D}_1$ としては Wick 多項式 $\sum_{l=0}^{P} \int :\varphi(x,t)^l: f_l(x)dx$ を Ω^F にかけて得られるベクトル全体が張る部分空間をとることができる ∎

時空の次元が決定的なことは $\|A\Omega^F\|^2$ を計算してみればわかる。

定理の前半と後半とに別々に短かい註釈を加える。まず前半の証明には一般になりたつ次の評価式が役に立つ。

<u>N_τ-評価</u>　手はじめに，$\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ の変換，

$$W_{0s}=\int d\underset{\sim}{q}\, w_{0s}(\underset{\sim}{q})\, a^s(\underset{\sim}{q}), \qquad a^s(\underset{\sim}{q})\equiv a(q_1)\cdots a(q_s),\ \text{etc.}$$

を考えると，これは

$$\left(a^s(\underset{\sim}{q})\Psi\right)_n(\underset{\sim}{k})=\sqrt{n+1}\cdots\sqrt{n+s}\ \psi_{n+s}(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{k})$$

なる変換 —— $\mathfrak{F}\to \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^s)\otimes\mathfrak{F}$ とみることができる —— と $\int d\underset{\sim}{q}\, w_{0s}(\underset{\sim}{q})\,\cdot$ という $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^s)\otimes\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ なる変換の合成である。こう見ると

$$\|W_{0s}N_0^{-s/2}\| \leqq \left\|\int d\underset{\sim}{q}\, w_{0s}(\underset{\sim}{q})\,\bullet\right\|_{op}$$

が容易に得られる。右辺は上記の第二の変換の operator norm であり，

$$N_\tau=\int dk\,\mu(k)^\tau a^*(k)a(k) \tag{3.12}$$

で，$N_\tau^{-1/2}$ は

$$N_\tau^{-1/2}\Omega^F=0, \qquad N_\tau^{-1/2}\Big|_{(\Omega^F)^\perp}=N_\tau^{1/2}\ \text{の逆作用素} \tag{3.13}$$

と定義する。

一般に $\prod_{i=1}^{r}\mu(p_i)^{\tau_i}\int dq\, w_{rs}(p,q)\prod_{j=1}^{s}\mu(q_j)\,\bullet = \tilde{w}$ を上記にならって $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^s)\otimes\mathfrak{F}\longrightarrow\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^r)\otimes\mathfrak{F}$ の変換とみると，

$$\mathbb{W}_{rs} = \int dp\,dq\,(a^*)^r(p)\,w_{rs}(p,q)\,a^s(q) \tag{3.14}$$

は $\mathbb{D}(\prod_{i=1}^{r}N_{\tau_i}^{+1/2})\times\mathbb{D}(\prod_{j=1}^{s}N_{\tau_j}^{+1/2})$ 上の双一次形式を定義し，

$$\left\|\left(\prod_{i=1}^{r}N_{\tau_i}^{-1/2}\right)\mathbb{W}_{rs}\left(\prod_{j=1}^{s}N_{\tau_j}^{-1/2}\right)\right\| \leq \|\tilde{w}\|_{op} \tag{3.15}$$

なる評価がなりたつ．これを N_τ-評価という．多くの場面で用いられる重要な評価式である．

<u>注意1</u>　N_τ の作用は，

$$(N_\tau\Psi)_n = \left(\sum_{i=1}^{n}\mu(k_i)^\tau\right)\psi_n(k_1,\cdots,k_n). \tag{3.16}$$

特に $\tau=0$ のときは右辺の $(\cdots)=n$ となり，つまり粒子の数をかぞえることになる．N_0 を粒子数の作用素という．同様の理由により $\tau=1$ の N_1 は自由粒子系の全エネルギーの作用素である．

<u>注意2</u>　$\prod_{i=1}^{r}\mu(p_i)^{\tau_i}w_{rs}(p,q)\prod_{j=1}^{s}\mu(q_j)^{\tau_j}\in\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^{r+s})$ なら上の $\|\ \|_{op}$ を $\mathbb{L}_2$ ノルムでおきかえてよい．$w_{rs}(p,q)\propto\delta(q-q_0)$ はこの枠に入らない例である．

定理3.1の後半はたとえば次の補助定理を用いて証明される [ZJ-'68]．

<u>補助定理3.1</u>　A を Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の対称作用素とし，S(A) をその Cayley 変換とする．$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素の v.N.

代数で巡回ベクトルΦ_0をもつとする．このときAのclosure $\bar{A}$が

$$\mathcal{D}(\bar{A}) \supset \mathcal{M}\Phi_0, \quad [\mathcal{M}, \bar{A}]\mathcal{M}\Phi_0 = 0$$

をみたすならば　$S(A) \in \mathcal{M}'$ となり　$\bar{A}$は自己共役とわかる∎

$S(A) \in \mathcal{M}'$がいえれば　$SS^* = S^*S$ で二つの deficiency space $\Delta_\pm = \{u : A^*u = \pm iu\}$が一致するから$\Delta_\pm = \{0\}$．こうして$\bar{A}$の自己共役なことがいえるわけである．定理2.1の証明に用いるには　$\Phi_0 = \Omega^F$とし，$\mathcal{M}$としては$\{\exp[i\varphi(f)],\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)\}$の生成するv.N.代数をとればよい．

定理2.1は，次節で見るように cut-off Hamiltonian といわれる一つの近似的ハミルトニアンの"相互作用部分"の本質的自己共役性を証明したことになっている．

§4 Cutoff Hamiltonians

以前に形式的に書き下したハミルトニアン(2.1)を前節の結果にもとづいて次のように改めよう：

$$H(g) = H_0 + H_I(g), \tag{4.1}$$

ここに，

$$H_0 = \frac{1}{2}\int :[\pi^2 + (\partial\varphi/\partial x)^2 + \mu^2\varphi^2]: dx, \tag{4.2}$$

$$H_I(g) = \lambda\int :\varphi^4(x): g(x)\,dx, \tag{4.3}$$

$g(x)$は space-cutoff とよばれるもので，

$$g(x) \in \mathcal{S}, \quad g(x) \geq 0, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq R/2 \\ 0 & |x| > R \end{cases} \tag{4.4}$$

このようなハミルトニアンをとったのでは§1に掲げた諸要請のうち相対論的共変性がみたされないことは明らかである．ここでの目論見は，一応 cutoff をしてハミルトニアンをコントロールの下におき，あとから $g(x) \longrightarrow 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$ の極限に行こうということなのである．

space の cutoff をしただけでハミルトニアンが意味をもつようになるか，どうか？確かに H_0 も $H_I(g)$ も自己共役になるが，どちらを摂動と見ても他より小さくない —— regular perturbation の枠には入らない．さらに場の理論では計算に運動量積分の発散が現われるのがむしろ通例である(†)．

しかし，いま考えているモデルでは次の定理がなりたつ．

<u>定理4.1</u> [19]　実数値の $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ をとればハミルトニアン $H(g)$ は定義域 $\mathbb{D}(H(g)) = \mathbb{D}(H_0) \cap \mathbb{D}(H_I(g))$ をもち自己共役である．$\mathbb{D}_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathbb{D}(H_0^n)$ においては本質的自己共役である ∎

この定理にはいろいろの証明がある．いろいろあるのは，行手に拡る問題の大きさと未知数性を考えるとき大いに歓迎すべきこととしなければならない．

(†) このモデルでは Feynmann 式の摂動計算に運動量積分の発散は現われない（摂動級数は発散する [11]）．摂動論がよいガイドになることは Glimm-Jaffe のつとに主張するところである．なお，[20]．

証明のIは次の補助定理を利用する：

<u>補助定理 4.1</u> [21]　以下の三条件がみたされれば $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_I$ は自己共役である．

1°　$\mathcal{H}_0$ も $\mathcal{H}_I$ も自己共役，そして $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}(\mathcal{H}_I)$，$\mathcal{H}_I$ は $\mathcal{D}_\infty$ の上で本質的に自己共役.

2°　自己共役なある $N \geqq 0$ が $\mathcal{H}_0$ と可換，かつ $N \leqq c\mathcal{H}_0$（c はある定数），さらに $(I+N)^{-1}\mathcal{H}_I(I+N)^{-1}$，$(I+N)^{+1}\mathcal{H}_I(I+N)^{-3}$ が有界.

3°　任意の $\varepsilon>0$ に対して数 b があって，

$$-\mathcal{H}_I \leqq \varepsilon N + bI, \quad \text{on } \mathcal{D}(N), \qquad (4.5)$$

$$\left.\begin{array}{r} -[\mathcal{H}_0^{1/2},[\mathcal{H}_0^{1/2},\mathcal{H}_I]] \leqq \varepsilon \mathcal{H}_0^{2}+bI \\ -[N,[N,\mathcal{H}_I]] \leqq \varepsilon N^{3}+bI \end{array}\right\} \left(\begin{array}{l}\mathcal{D}_\infty\times\mathcal{D}_\infty \text{ 上の} \\ \text{双一次形式として}\end{array}\right) \blacksquare$$

これらの条件のうち 2° が §3 に述べた N_τ-評価から得られることは見やすい．この補助定理はいわゆる singular perturbation の理論 [21] の適用条件を述べたものであるが，理論そのものは問題の $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_I$ をひとまず近似列 $\mathcal{H}_n=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_{In}$ でおきかえ　その極限を論ずるものである：

<u>補助定理 4.2</u> [2GJ-'70]　$\mathcal{G}$ を可分とし，列 $\mathcal{H}_n=\mathcal{H}_n^*$ が "densely bounded" であり $R_n(\zeta)=(\mathcal{H}_n-\zeta)^{-1}$ と $R_n(\zeta)^*$ がある複素数 ζ において互に共役な R，R^* に強収束するとすれば，

$$R(\zeta)=(\mathcal{H}-\zeta)^{-1}, \quad \text{かつ} \quad \mathcal{H}=\mathcal{H}^* \quad \Big(=\text{"graph} \lim_{n\to\infty}\text{"}\ \mathcal{H}_n\Big) \blacksquare$$

ここで " " つきで記した概念については [21]，[2GJ-'70] を

参照．次に記す"Higher Order Estimate"を利用してこの補助定理を直接に適用するのが第II の証明である．近似列としては場を周期的境界条件つきの"箱"Vに押しこめて"粒子"の運動量kを離散的にしさらにその運動量の$|k|>\kappa$の部分をcutoffして"自由度"を有限にしたハミルトニアン$\mathcal{H}(g,V,\kappa)$を用いることができる．その自己共役性を予め証明しておく必要があるけれども，これは質点系の量子力学の問題に帰着しているわけである[22]．

<u>補助定理 4.3</u>（Higher Order Estimate）[23]　$\varepsilon>0$ および整数 $l\geq 3$ に対して　十分に大きなjをとると定数a, bが存在して，

$$\mathcal{H}_0^{3-\varepsilon}\, N^{l+\varepsilon-3} \leq a(\mathcal{H}_0+P[\varphi,g]+b)^j \qquad (4.6)$$

ここに$P[\varphi,g]$は$\varphi(x)$のWick多項式（次数$p=$偶）を(4.4)の$g\geq 0$で均らしたもの．jの下限はε, l, pで定まるが$p\leq 4$のときは$j=l$でよい▮

第III の証明は色合いがちがい，$e^{-t\mathcal{H}_0}$ $(t>0)$が"hypercontractive semigroup"をなす（" "の意味は$1°$ $e^{-t\mathcal{H}_0}$はcontractive on $\mathbb{L}_1$, $\forall t>0$, $2°$ $\exists T>0$ s.t. $e^{-T\mathcal{H}_0}$ bounded map : $\mathbb{L}^2\to\mathbb{L}^4$）ことを利用する．そのために"場$\varphi(x,0)$を対角にする表示[24]を用い$\mathcal{F}$ock空間を$\mathbb{L}^2(Q)$に焼き直す．$Q$の各点は"古典論の意味の"場の状況のひとつひとつに対応することになる．関数$F_n(\xi)=\xi$ if $|\xi|\leq n$, $=n$, if $|\xi|>n$と定義すれば，

<u>補助定理 4.4 [25]</u>　$e^{-t\mathcal{H}_0}$ を hypercontractive とし，$\mathcal{H}_I(g) \in \mathbb{L}^p$（ある $p>2$），$e^{-\mathcal{H}_I(g)t} \in \mathbb{L}^1$，$\forall t>0$ とする．そうすると $1<q<(1-\frac{1}{p})^{-1}$ なるすべての q について $\exp[t(\mathcal{H}_0+F_n(\mathcal{H}_I(g)))]$ が $\mathbb{L}^q \to \mathbb{L}^q$ の写像として強収束し，極限 $e^{-t\mathcal{H}}$ は $\mathbb{L}^q$ 上の強連続な半群，そして

$$\| e^{-t\mathcal{H}} \psi \|_q \leqq c^t \|\psi\|_q, \qquad (c \text{ は } \mathcal{H}_0, q, V \text{ による定数}).$$

さらに $\mathcal{H}$ は $\mathbb{D}(\mathcal{H}_0) \cap \mathbb{D}(\mathcal{H}_I)$ のある部分空間で定義されて本質的に自己共役，その closure $\overline{\mathcal{H}}$ は作用素の通常の意味の和 $\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_I$ の closure に一致する∎

以下 $\overline{\mathcal{H}(g)}$ を $\mathcal{H}(g)$ と書く．その<u>スペクトル</u>について次のことが分かっている：

1] <u>基底状態</u> Ω_g，いま inf spectrum $\mathcal{H}(g) = E_0(g)$ とおけば

$$0 \geqq E_0(g) > -(\text{定数}>0)\cdot(\text{supp } g \text{ の長さ}) \qquad (4.7)$$

上限のほうは $\langle \Omega^F, \mathcal{H}(g)\Omega^F \rangle = 0$ と変分原理からわかる．下限の証明には Feynmann-Kac の公式を利用するもの，contraction semi-group を用いるものなどいろいろある [26]．なお [25] も参照．

以前に補助定理 4.1 のところで掲げた不等式 (4.5) が (4.7) よりきつい評価であることに注意しよう．$\mathcal{H}(g)$ の自己共役性を示すためには　どの方法によるにせよ　下からの bound が使われているのである．

基底状態 Ω_g が確かに存在して unique であることは補助定

理4.2の下に掲げた $H(g,V,\kappa)$ で $H(g)$ を近似することから出発して証明される．以下，これまでの $H(g)$ から $E_0(g)$ を引いたものをあらためて $H(g)$ と記す：

$$H(g) = H_0 + H_I(g) - E_0(g) \tag{4.8}$$

これによって

$$H(g)\Omega_g = 0 \tag{4.9}$$

となる．区間 $[0,\mu)$ にこの $H(g)$ が Ω_g のそれ以外のスペクトルをもつとしても高々縮退度が有限の離散スペクトルでしかないこともいえるが，これは相互作用による質量のずれ——もしあれば——あるにきまっている!?——を消す繰り込み項

$$-\frac{1}{2}\delta\mu^2\int :\varphi(x)^2: g(x)^2\,dx, \quad (\delta\mu^2\text{は有限}) \tag{4.10}$$

を予め $H_I(g)$ に含めておいたとしての話である[26GJ]．相互作用が空間的に g により限られているから，$g\to 1$ では連続スペクトルに帰する"波"が，むしろ波束になることを好んで $[0,\mu)$ に落ちて離散スペクトルを示すことがあるかもしれない．

2] <u>散乱状態</u>　漸近場に関し $\left(a^\#(h)=\int[a(k)\ \text{or}\ a^*(k)]h(k)\,dk,\ h\in\mathcal{S}\right)$,

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{-itH(g)}\,e^{itH_0}\,a^\#(h)\,e^{-itH_0}\,e^{itH(g)} \tag{4.11}$$

が $D(H(g)^{1/2})$ の上で強収束の意味で存在することも証明されているが，(†) その証明の筋書きは以前に麦林・加藤により湯川モデル（ただし空間と運動量の両方を cutoff；$\nu=3$ 次元！）

(†) しかしどんな散乱がおこるのかは分かっていない。

の漸近場の存在の証明に用いられたもの[27]と異らない[28]. ここでも補助定理4.3が利用される. ここの結果から$[\mu,\infty)$に連続スペクトルの存在することが分かる. エネルギー$\mathcal{H}$と運動量$\mathcal{P}$(§1 WII 相対論的共変性の項を参照)の joint spectrum については[29]の結果がある。

場$\varphi(x,t)$の$t\to\pm\infty$にわたる時間発展を論ずるのに space cutoff をしたハミルトニアンでは不十分なことはいうまでもない. しかし, 初期値問題の$\mathcal{H}(g)$による解も時空のある有界領域では cutoff g に影響されないことが証明できる. このことを次節で述べる.

§5 Heisenberg Field

(3.9) の$\varphi(x,0)$, $(\partial\varphi/\partial t)(x,0)=\pi(x,0)$ を Cauchy data として波動方程式(2.4)を解きたい. しかし, 右辺のφ^3に何らかの意味ずけが必要である.

ここでは, だから上に求めたハミルトニアン$\mathcal{H}(g)$を用いて

$$\varphi_g(x,t)=e^{i\mathcal{H}(g)t}\,\varphi(x,0)\,e^{-i\mathcal{H}(g)t} \qquad (5.1)$$

を調べ, これの満たす運動方程式を論ずるという手順にする.

はじめ有界な作用素Aの$\mathcal{H}(g)$による時間発展,

$$A\longrightarrow A(t)\equiv\sigma_t(A)=e^{i\mathcal{H}(g)t}A\,e^{-i\mathcal{H}(g)t} \qquad (5.2)$$

を考える. 空間$\mathbb{R}^1$の有界開領域Bをとり次のような作用素

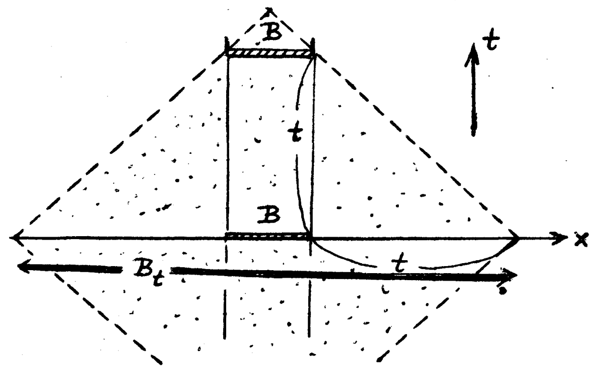
$$\left\{ e^{i\varphi(f)},\ e^{i\pi(f)}\ ;\ f\in\mathcal{S}(R^1),\ \mathrm{supp}\, f\subset B \right\} \tag{5.2a}$$

の全体が生成する v.N. 代数を $\mathfrak{A}(B)$ と記す(†). $\bigcup_B \mathfrak{A}(B)$ の norm closure なる C^*代数を $\mathfrak{A}$ とする. ここで抽象的な C^*代数に移るのは——次節で述べることだが——"空間全体を問題にしようとすると Fock空間と決別しなければならない"という事態を予想してのことである. いま,

$$B_t = \{ x :\ |x-y| \leqq t,\ y\in B \}$$

を定義すると, 次の定理がなりたつ.

<u>定理5.1</u> [19] (5.2) において $A\in\mathfrak{A}(B)$ に対して $g(x)=1,\ x\in B_t$ をとると,



1° $\sigma_t(A)$ は B 内で観測するかぎり g に無関係.

2° σ_t は $\mathfrak{A}$ の 1-パラメタ自己同型に拡大できる ▌

定理の前半は $\varphi(x,t)$ の伝播速度が光速$=1$を越えないことがいえれば直ちに納得される. ところが, (5.2) は

$$\sigma_t(A) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{s\text{-}lim}}\ \underbrace{\hat{\sigma}_{\frac{t}{n}}\Big(\cdots \hat{\sigma}_{\frac{t}{n}}}_{n\text{重}}\Big(\sigma_{\frac{t}{n}}(A)\Big)\cdots\Big) \tag{5.3}$$

ただし,

$$\hat{\sigma}_{\frac{t}{n}} = e^{iH_I(g)\frac{t}{n}}\left[e^{iH_0\frac{t}{n}} A\, e^{-iH_0\frac{t}{n}} \right] e^{-iH_I(g)\frac{t}{n}},$$

と書きかえられる. (Trotter の公式 [30]). いま考えているモデルで

(†) $\varphi(f)$, $\pi(f)$ の自己共役性は Nelson の定理 [31] を利用して容易に示せる.

は $H_I(g)$ が空間微分を含まず従って $e^{iH_I(g)\frac{t}{n}}\cdots e^{-iH_I(g)\frac{t}{n}}$ は場の伝播を起さない．一方 H_0 による伝播は (2.4) で $\lambda=0$ とおいた方程式に従うことがいえて，従って光速を越えることがない（Lorentz 不変性の議論からもわかる）．やかましくいえば B が開領域だから多少の ε-論法がここで必要なわけである．

定理の後半の証明は記すまでもなかろう．

場の作用素 $\varphi(f,0)$，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ が たとえば $\mathbb{C}_g^\infty=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathbb{D}(H(g)^n)$ で本質的に自己共役なことは Nelson の Analytic Vector の定理 [31] を用いて直ちに示される．この結果を利用すると $\varphi(f,0)$ の spectral projection に上記の定理 5.1 を適用したとして $\varphi_g(f,t)$ についても類似の定理が得られる．そして $\varphi_g(\check{f})$，ただし

$$|\check{f}|_1\equiv\int\left(\|\check{f}(\cdot,t)\|_2+\|\partial_x\check{f}(\cdot,t)\|_2\right)dt<\infty \tag{5.4}$$

が $\mathbb{C}_g^\infty$ で本質的に自己共役という結果も得られるが，証明はなかなか大変なように見える [32]．ただし $\partial_x\equiv\partial/\partial x$.

場の運動方程式は，まず (5.4) の意味で $|\check{f}|_1+|\partial_t\check{f}|_1<\infty$ とすると $\mathbb{D}([H(g)+b]^{3/2})$ において

$$\partial_t\varphi_g(\check{f})=\pi_g(\check{f})=i[H(g),\varphi_g(\check{f})], \tag{5.5}$$

さらに $|\partial_t^2 f|_1$ も $<\infty$ とすれば，

$$\left\{[\partial_t^2-\partial_x^2+\mu^2]\varphi_g\right\}(\check{f})=-4\lambda\int e^{iH(g)t}:\varphi_g(x,0)^3:e^{-iH(g)t}\check{f}(x,t)\,dx\,dt \tag{5.6}$$

がいえる [32].

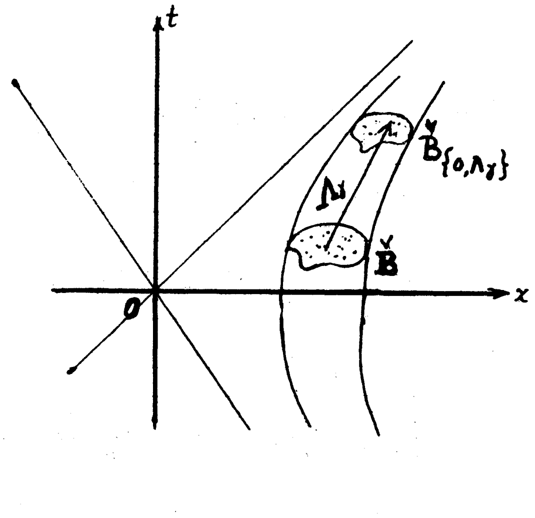
定理 5.1 において $\sigma_t(A)$ は "B内で観測するかぎり $g(x)$ ——の B_t の外での振舞——に無関係である" と述べたが，実は B_t を"底"とするダイヤモンド（点線の中）での観測について当然おなじことがいえる. (5.4)-(5.6) の $\check{f}$ の台がこの領域に含まれている限り φ_g の g は落としてよいわけである.

場の（非斉次）Lorentz変換を論ずるには §1 の Haag-Kastler の要請のところに述べた意味の代数 $\check{\mathfrak{A}} = \overline{\bigcup_{\check{B}} \mathfrak{A}(\check{B})}$ を考える. 時空の並進はやさしい. $A \in \mathfrak{A}(\check{B})$ に並進 $\{a,1\}$ を施すには $\check{B}$ とその平行移動 $B_{\{a,1\}}$ とを共に含む大ダイヤモンドの底で $=1$ の $g(x)$ をとり $H(g)$ を作る; これと $P=\int k\, a^*(k)a(k)\,dk$ が並進のユニタリ変換を生成する. これは $\check{\mathfrak{A}}$ 上の並進自己同型 σ_a に拡大される.

Lorentz回転 $\Lambda_\gamma : (x,t) \longrightarrow (x\cosh\gamma + t\sinh\gamma,\ x\sinh\gamma + t\cosh\gamma)$ の生成作用素は形式的には,

$$M(g) = \int x\, H(x)\, g(x)\, dx \qquad (5.6)$$

である, ただし $H(x)$ はハミルトニアン密度 [(4.2) と (4.3) の被積分関数の和, そこの $g(x)$ ははずすとして!]. このMの自己共役



性は証明されていない．被積分関数にあるxのために一般のgではMの正定値なことがいえないためである．

しかし，Poincaré群の乗法規則を思い出し，かつ（局所的）並進の生成作用素がすでに得られていることを考慮すると前頁の図の$\check{B}$のように$x > |t|+1$の範囲に$\mathrm{supp}\,\check{f}$の含まれた$\varphi(\check{f})$のLorentz回転だけ考えれば十分なことがわかる．Lorentz回転の軌跡は図に示したような双曲線であるから，この場合$\mathrm{supp}\,g$を$x g(x) > 0$になるように制限できることになり，$M(g)$の自己共役性が以前の方法で証明できる[33]．

もちろん，この制限なしで$M(g)$の自己共役性の証明されることが望ましいのはいうまでもない．

§6　space-cutoffの除去（$g \to 1$）

上の議論では相互作用ハミルトニアンをFock空間での作用素とするためにspace cutoff $g(x)$を施すことを余儀なくされた．これは理論の並進不変性を損う忌むべきことであるが，しかしFock表現を用いるかぎり一般的に起ることである：

<u>定理 6.1</u>（Haagの定理[35]）．Fock表現を用いるEuclidean Invariantな場の理論ではFockの真空（no-particle state）Ω^FはEuclidean Invariantである ▮

この定理の深刻さは説明を加えないと分かりにくいかもし

れない(†). まず,

場の理論が Euclidean Invariant であるとは, 座標系の回転 R, 並進 $\vec{a}$ からなる Euclid 群の連続なユニタリ表現 $U(\vec{a},\vec{R})$ がそなわっていて $U(\vec{a},R)\phi(\vec{x})U(\vec{a},R)^{*}=\phi(R\vec{x}+\vec{a})$, $\pi(x)$ についても同様, となることをいう ∎

Ω^F の Euclidean Invariance は $U(\vec{a},R)\Omega^F=\Omega^F$. 物理的にいって任意に平行移動しても回転をしても同じに見え, しかも規格化できる状態ベクトルは真の真空 (physical vacuum) Ω_{phys} を記述するしかないであろう. 故に $\Omega^F=c\Omega_{phys}$, $|c|=1$. しかるに再び物理的にいって真の真空には時間がたっても何事も起らぬはずだから系の全ハミルトニアン $H=H_0+H_I$ の固有状態のはず. エネルギーの原点を調節して $H\Omega_{phys}=0=H\Omega^F$. ところが相対論的不変なラグランジアン密度から作った H でこの性質をもつのは自由場の H_0 だけしかない.

これは合理的な場の理論で Φ_{0F} 表現が使えるのは自由場の場合しかないことを示す.

<u>定理の証明</u> (3.9) を用いて $a(k)\Omega^F=0$ を書くと,

$$\left[(-\Delta+\mu^2)^{1/4}\varphi(x,0)+i(-\Delta+\mu^2)^{-1/4}\pi(x,0)\right]\Omega^F=0. \tag{6.1}$$

これに $U(\vec{a},R)$ を左から掛けてみると, $U(\vec{a},R)\Omega^F$ が同じ (6.1) をみたすことがわかる. しかるに Φ_{0F} 空間には $a(k)\Psi=0$, $\forall k\in\mathbb{R}^1$

(†) Haag の定理にはいろいろの形がある. [35] を見よ.

なる元はΩ^Fの定数倍しかない．故に$U(a,R)\Omega^F = \lambda(a,R)\Omega^F$，$|\lambda(a,R)| = 1$．この$\lambda(a,R)$はEuclid群の1次元表現（連続！）になるが，それはtrivialなもの$\lambda(a,R) = \text{const.}$しかない∎

元のFock空間から脱出して有用な空間を見出すためには次の定理が用いられる：

<u>定理6.2</u>（GNS構成法［34，§2.4］）　C^*代数$\mathfrak{A}$上に"状態" ω —— $\mathfrak{A}$上の正定値・連続な汎関数で$\omega(\mathbb{1}) = 1$，$\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$に規格化されたもの —— が一つあたえられると，Hilbert空間$\mathfrak{H}_\omega$，巡回ベクトルΩ_ωが定まり$\mathfrak{H}_\omega$の作用素による$\mathfrak{A}$の巡回表現π_ωが定まる．構成はユニタリ変換の任意性を除いて一意的である∎

これを物理にもちこんだのは［15］が最初かと思われる．

われわれの問題にこの定理を適用するには次のようにする．space cutoffをした理論は完成していて(5.2a)の所に記した代数$\mathfrak{A}(B)$，$\bigcup_B \mathfrak{A}(B)$のnorm closureなる$C^*$代数$\mathfrak{A}$が定まっており，かつ$H(g)$の基底状態$\Omega_g \in \mathfrak{F}$が得られている．

以下議論を円滑に進めるためにC_0^∞級の実数値関数$g(\cdot)$，

$$g(x) \geq 0 \;; \; g(x) = 1, \quad x \in [-3, 3] \quad \text{かつ} \quad g(x) = 0, \; |x| \geq 4 \qquad (6.2)$$

を固定しspace cutoffの列$g_n(x) = g(x/n)$，$n = 1, 2, \cdots$を考える．そして$H(g_n)$の基底状態Ω_n（$\equiv \Omega_{g_n}$）を用いて$\mathfrak{A}$上の"状態"の列，

$$\omega_n(A)=\frac{1}{n}\int\langle\Omega_n,\ \sigma_\alpha(A)\Omega_n\rangle h(\alpha/n)\,d\alpha,\qquad A\in\mathfrak{A}\qquad(6.3)$$

を作って $n\to\infty$ での収束をまず証明しよう[†]. その極限 ω に GNS 構成法を適用して $g\to1$ の理論を得ようという目論見である. ただし, $h(\cdot)\geq0$ は C_0^∞ 級の実数値関数で

$$\mathrm{supp}\,h\subset[-1,\ 1]\quad\text{かつ}\quad\int h(x)\,dx=\frac{1}{n}\int h(x/n)\,dx=1$$

とする. σ_α は空間の距離 α の平行移動をする $\mathfrak{A}$ の自己同型. (6.3) は $A\in\mathfrak{A}$ を固定して基底状態 Ω_n を左右に距離 n 程度ふらせながら A の"真空期待値"を平均しているのだと見てもよい. この平均操作は cutoff を除いた最終の真空状態 ω の並進不変性を保証するのみならず, 極限の存在の証明そのものにも一役かうはずである(平均操作なしで証明ができたらおもしろい!!).

上の ω_n は $\mathfrak{A}$ 上の状態として normal であり(混合状態!) 適当な密度行列 Λ_n を用いると,

$$\omega_n(A)=\mathrm{tr}\,(\Lambda_n A)\qquad(6.4)$$

と書けるはずであることに注意しよう [35, §1.4.2]. ここでは tr は $\mathfrak{F}$ の直交系 $\{u_s\}$ を用いた $\sum_s\langle u_s,\Lambda_nAu_s\rangle$ の意味.

次の定理がなりたつ.

定理 6.3 [36] 空間の有界開領域を B とする (時空 $\mathbb{R}^2$ の有界開領域 $\check{B}$ におきかえてもよい). このとき列 $\omega_n|_{\mathfrak{A}(B)}\in\mathfrak{A}(B)^*$

[†] cutoff g を"列"に限らない一般の証明はまだ知られていない.

は $\mathfrak{A}(B)^*$ のなかで norm compact な部分集合に含まれる．その極限はどれも normal state である ▮

極限の一つを ω とすると[†]，state の norm の意味で

$$\| (\omega - \omega_{n_j}) \big|_{\mathfrak{A}(B)} \| \longrightarrow 0, \qquad (j \to \infty)$$

なる部分列 (ω_{n_j}) がとれることになり，対角線論法によりさらに B に無関係に収束する部分列がとれる．極限 ω に GNS 構成法を適用して，次の定理を得る：

定理 6.4 [36]　上記の ω に対して　可分な Hilbert 空間 $\mathfrak{F}_{ren}$[††]，その上の作用素環への $\mathfrak{A}$ の *-同型，σ_a, $a \in \mathbb{R}^2$ の連続ユニタリ表現 $U(a)$，そして一つのベクトル $\Omega_{phys} \in \mathfrak{F}_{ren}$ が存在して，

$$\left.\begin{aligned} &\omega(A) = \langle \Omega_{phys}, \pi(A)\Omega_{phys} \rangle, \\ &U(-a)\pi(A)U(a) = \pi(\sigma_a(A)), \\ &U(a)\Omega_{phys} = \Omega_{phys}. \text{[†††]} \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

がなりたつ ▮

$U(a)$ の存在の証明は，ω に収束する部分列 ω_{n_j} の $\omega_{n_j}(\sigma_a(A)) = \omega_{n_j}(A)$ なる性質が極限に遺伝し $\omega(\sigma_a(A)) = \omega(A)$ となることから $\pi(\sigma_a(A))$ と $\pi(A)$ のちがいは GNS 構成法の不定性たるユニタリ同値の範囲内であることに注意すれば得られるが，$U(a)$ の強連続性の証明には Locally Fock Property といわれる性質を使う：

定理 6.5 [36]　$\check{B}$　（B でもよい）を固定するとユニタリ変換

[††]　$\mathfrak{F}_{phys}$ としたいところだが原著の記法に従う．
[†]　極限の一意性については何もわかっていない．
[†††]　並進についての不変性しかいえていないことに注意！ Lorentz 回転について未知．

$V_{\check{B}}: \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_{ren}$ が存在して，$\mathfrak{F}$ の作用素としての $A \in \mathfrak{A}(\check{B})$ に対し

$$\pi(A) = V_{\check{B}} A V_{\check{B}}^{*}, \qquad (6.6)$$

なる関係がつけられる ∎

この関係のおかげで $U(a)$ と"$\check{B}$ 内での並進に関しては正しい"強連続な $\exp i[H(g)\tau - P\alpha]$ が結びつくのである。

証明は定理6.3から始まるが，それには次のことを用いる。

<u>補助定理 6.1</u> [36] $\mathcal{B}$ を v.N. 代数，I型の因子とし，$\hat{N} \geq 0$ なる(非有界)作用素がコンパクトな $\hat{N}^{-1} \in \mathcal{B}$ をもつとすれば，集合

$$\{\Lambda;\ \Lambda \in \mathcal{B},\ 0 \leq \Lambda \leq I,\ tr(\Lambda \hat{N}) \leq 1\}$$

は trace-norm compact である ∎ この補助定理は"純粋"状態の列 Ω_n につき $\|\hat{N}^{\frac{1}{2}}\Omega_n\| < 1$ かつ $\hat{N}^{-1}$ がコンパクトなら $\Omega_n = \hat{N}^{-1/2}\cdot(\hat{N}^{1/2}\Omega_n)$ はコンパクトな集合に収まるという見易い道理の"混合"状態への一般化と見られる。trace norm の定義は $\mathcal{U}$ がすべてのユニタリ作用素にわたるとして $\|\Lambda\|_{tr} = \sup_{\mathcal{U}} tr(\mathcal{U}\Lambda)$ としてよいが一方 v.N. 代数 $\mathcal{B}$ の元はユニタリな元の有限個の和で書けるから (Λ_n) の trace-norm compact 性から —(6.4)に与えた注意により— 直ちに (ω_n) の norm (←"状態"の意味の) compactness が従う。

この補助定理を用いるには $\hat{N}$ として次の $N_{\tau,M}$ に I を加えたものを使うことができる：$\hat{N} = N_{\tau,M} + I$,

$$N_{\tau,M} = \int A^{*}(x) E_M(x)\left\{-\frac{d^2}{dx^2}+\mu^2\right\}^{\tau/2} E_M(x) A(x)\,dx, \quad (0<\tau<1/4) \qquad (6.7)$$

ここに E_M は空間の領域 $[-M, M]$ の特性関数であり，

$$A(x) = (2\pi)^{-1/2} \int a(p)\, e^{ipx}\, dp \,. \tag{6.8}$$

として，以後，作用素は台が空間の領域$[-M, M]$に含まれる波動関数の生成するFock空間$\mathfrak{F}([-M, M])$を舞台にして考えることにする．という意味は次のとおり：§3では"運動量空間"の波動関数でもってFock空間を構成したが，その波動関数をFourier変換して"座標空間"に写したとき台が$[-M, M]$に収まるものだけを考え，そうしてできる空間を完備化して$\mathfrak{F}([-M, M])$とするのである．作用素環として，

$$\left\{ \exp\left(i[A(f)+A^*(f)]\right),\ \exp\left([A(f)-A^*(f)]\right),\quad f \in \mathcal{S}(R^1),\ \mathrm{supp}\, f \subset [-M, M] \right\}$$

が生成する$\mathfrak{B}_M$をとれば，その元が$\mathfrak{F}([-M, M])$をそれ自身に写すことは容易に確かめられる．

(6.7)の$N_{\tau,M}$であるが，もし$\tau=0$であったらこれは$\mathfrak{F}([-M, M])$において粒子数を表わす作用素である．このとき$(N_{\tau M}+I)^{-1}$はコンパクトでない．粒子数の固有値は各粒子の運動の自由度を反映して無限に縮退するからである．(6.7)に粒子のエネルギーの作用素を挿入したのはその縮退を解くためであるが，一方$\tau=1$にとれないのは$E_M(x)$が"角"をもつことによる．そして，その"角"は粒子のエネルギーを離散的にするために必要なのであった．これで$\hat{N}^{-1}$のコンパクト性が得られる．

次に$\mathfrak{B}_M$上に制限したω_nにつき$\omega_n(\hat{N}) < \infty$をいう必要がある．大雑把にいえば，議論は次のようになるだろう：

$$\mathcal{H}(g_n) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I(g_n) = \frac{1}{2}\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2}[\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I(2g_n)]$$

という恒等式から，

$$\frac{1}{2}\omega_n(\mathcal{H}_0) = \omega_n(\mathcal{H}(g_n)) - \frac{1}{2}\omega_n(\mathcal{H}(2g_n))$$

を得るが，(4.7)によれば $0 \geq E_0(g) \geq -\gamma n$ （γは定数）だから $\omega_n(\mathcal{H}_0) \leq \gamma n$，そしてもちろん $\omega_n(N) < \omega_n(\mathcal{H}_0)$ —— Nは(3.16)で$\tau=0$とおいた粒子数の作用素——，よって区間$[-M, M]$の粒子数に対して

$$\omega_n(\hat{N}) < \gamma M \tag{6.9}$$

というnに関して一様な評価が得られた．

これで補助定理を適用するための要件がそろい，定理6.3が直ちに得られるかに思われるかもしれない．しかし，ここで代数$\mathfrak{A}(B)$と代数$\mathfrak{B}_M$の構造の違いに注意する必要がある．$\mathfrak{A}(B)$では均らしの関数のsuppはたしかにBに局在しているが，展開(3.9)にある因子$[\mu(k)]^{\pm 1/2}$のため，$\varphi(f)$は

$$\varphi(f) \sim \int f(x)\kappa(x-y)A(y)\,dy + [A^* \text{の項}]$$

（κは$\mu(k)^{-1/2}$のFourier変換）のように$A(x)$の意味では長い尾を引くことになってMをどんなに大きくとっても $\exp[i\varphi(f)] \notin \mathfrak{B}_M$.

そこで$\mathfrak{A}(B)$の元を$\mathfrak{B}_M$の元で近似する問題を考えることになる．議論の詳細は原著[36]によって見ていただきたい．

§7 <u>あとがき</u>　ここでちょうど原稿用紙がなくなりました．残りはまたいつか御報告する機会があるでしょう．

（LES HOUCHESにて）

文献

本文でたとえば［2GJ－'70］として引用したのは［2］の中のGlimm & Jaffe (1970) のことである。

[1] たとえば 梅沢博臣・福田信之：素粒子論特論（岩波講座・現代物理学，岩波講座，　年）

[2] A. Jaffe : Whither Axiomatic Field Theory ? Rev. Mod. Phys. 41 ('69) 576.

J. Glimm : The foundations of quantum field theory. Advances in Math. 3 ('69) 101

J. Glimm : Models for quantum field theory, Varenna Lecture (Academic Pr. '69).

J. Glimm & A. Jaffe : Quantum Field Theory Models, Les Houches Lecture ('70)
(to be published from Gordon and Breach).

A. Jaffe : ETH Lecture Note — Constructive Quantum Field Theory ('68).

[3] H. Araki, in "Local Quantum Theory", Varenna Lecture (Academic Pr. '69).

N. N. Bogoliubov et al : 場の量子力学への公理論的アプローチ（露文）.

R. Jost : The General Theory of Quantized Fields (AMS, 1965).

R. F. Streater & A. S. Wightman : PCT, Spin & Statistics and All That (Benjamin, '64).

[4] N. Bohr and L. Rosenfeld. Danske ... (1933)

A. S. Wightman : La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs,
Ann. Inst. H. Poincaré, 1 (1964) 403–420.

[4'] H. J. Borchers : Nuov. Cim. 33 (1964) 1600.

[4''] D. Ruelle : Helv. Phys. Acta 35 (1962) 147.

[5] R. Haag and B. Schroer : Jour. Math. Phys. 3 (1962) 248.

[6] R. Haag and D. Kastler: An algebraic approach to q.f.t. Jour. Math. Phys. 5 ('64).

[7] 荒木不二洋: C^*環と物理学. 数学 (1968?) 岩波書店.

[8] I. Segal, Ann. Math. 48 (1947) 930.

[9] H. Araki and R. Haag:

[10] R.P. Feynman: 物理法則はいかにして発見されたか (江沢 訳, ダイヤモンド社).

[11] A. Jaffe: Divergence of Perturbation Theory for Bosons. Commun. Math. Phys. 1 ('65) 127.

[12] M. Frank: Jour. Math. Phys. 8 (1967) 1121.

B. Simon (Appendix by A. Dicke): Coupling constant analyticity for the Anharmonic oscillator, Ann. of Phys. 58 ('70) 76.

[13] von Neumann: Math. Ann. 104 (1931) 570.

[14] A.S. Wightman and S.S. Schweber. Phys. Rev. 98 (1955) 812

江沢 洋: 自由度無限大の系の量子力学, 日本物理学会誌 1970年1月号.

[15] H. Araki; Princeton Thesis (1960). Jour. Math. Phys. 1 (1960) 492.

[16] F.A. Berezin: The Method of Second Quantization (tr. by 麦林, Acad. Pr. '66).

[17] A.S. Wightman and L. Gårding; Arkiv Fysik 28 ('64) 129.

[18] A. Jaffe: Wick polynomials at a fixed time, Jour. Math. Phys. 7 (1966) 1250.

[19] J. Glimm and A. Jaffe: A $\lambda\varphi^4$ QFT without cutoffs. I, Phys. Rev. 176 ('68) 1945.

[20] J. Glimm and A. Jaffe; Infinite Renormalization of the Hamiltonian is necessary, Jour. Math. Phys. 10 (1969) 2213–2214.

[21] J. Glimm and A. Jaffe: Singular Perturbations of self-adj. ops. Comm. P. A. M. 22 ('69).

[22] A. Jaffe; Princeton Thesis – The dynamics of a cut-off $\lambda\varphi^4$ theory (1965).

[23] L. Rosen: The $(\phi^{2n})_2$ quantum field theory: higher order estimates. preprint.

[24] Van Hove : Les difficultés des divergences pour un modèle particulier de champ quantifié, Physica 18 (1952) 145-152.

[25] B. Simon and R. Höegh-Krohn : Hypercontractive semigroup and two-dimensional self-coupled Bose fields, preprint.

[26] E. Nelson : A quartic interaction in two-dim. in Math. Theor. of Elem. Particles (MIT. Pr. '66).

P. Federbush : A partially alternate derivation of a result of Nelson. JMP 10 ('69) 50.

J. Glimm and A. Jaffe : The $\lambda(\phi^4)_2$ q.f.t. without cutoffs III. The physical vacuum. Acta Math, to appear.

[27] N. Mugibayashi and Y. Kato : Regular perturbation and asymptotic limits of operators in q.f.t. Prog. Theor. Phys. 30, 103, 409 (1963)

[28] R. Höegh-Krohn : field theory with a space cutoff.

N. Mugibayashi and Y. Kato ; preprint: Asymptotic fields in the $\lambda(\phi^4)_2$ quantum

[29] J. Glimm and A. Jaffe : The energy-momentum spectrum and vacuum expectation values in quantum field theory, JMP to appear.

[30] H.F. Trotter : Proc. Am. Math. Soc. 10 (1959) 545. On the product of semi-group operators.

[31] E. Nelson : Analytic Vectors, Ann. Math 70, (1959) 572.

91 ('70) 362

[32] J. Glimm and A. Jaffe : The $\lambda(\varphi^4)_2$ q.f.t. without ... II. The field ops. ... Ann. Math

[33] Diximier : C^*-algebres ...

[34] Diximier : Les Algebres d'Operateurs ... .

[36] [26 GJ] に同じ.